Oscilador armónico

Clásico

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{p(t)}{m} \qquad \frac{d}{dt}p(t) = -m\omega^2 x(t)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \qquad \underline{x} = \beta x \qquad \underline{p} = \frac{1}{\hbar\beta} p$$

$$\frac{d}{dt}\underline{x} = \omega \underline{p} \qquad \frac{d}{dt}\underline{p} = -\omega \underline{x}$$

Variables normales.

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{x} + i\underline{p}) \implies \frac{d\alpha(t)}{dt} = -i\omega\, \alpha(t)$$

$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t}$$

$$E_{tot} = \frac{p^2(t)}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2(t) = \frac{p^2(0)}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2(0) = \hbar\omega|\alpha_0|^2$$

Oscilador armónico cuántico

10.4. Cuántico

- Sustituimos las cantidades clásicas por sus operadores correspondientes $[X, P] = i\hbar$
- El Hamiltoniano es $H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2$
- Como H no depende del tiempo, el estudio se reduce a encontrar los eigenestados de H.

La ecuación $H|\varphi\rangle = E|\varphi\rangle$ en $\{|x\rangle\}$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right]\varphi(x) = E\,\varphi(x)$$

Las soluciones son polinomios de Hermite. (pero lo haremos distinto)

- Los e-valores de H son todos >0 pues $\min\{V(x)\}=0$.

- Adimensionalizamos igual

$$\underline{\hat{X}} = \beta \hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,\hat{X}$$

$$\underline{\hat{P}} = \frac{1}{\beta\hbar} = \frac{1}{\sqrt{\hbar m\omega}}\,\hat{P}$$

$$[\underline{\hat{X}}, \underline{\hat{P}}] = \frac{i\hbar\beta}{\beta\hbar} = i \qquad \underline{\hat{H}} = \frac{\hat{H}}{\hbar\omega}$$

$$\underline{\hat{H}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\hat{X}}^2 + \underline{\hat{P}}^2\right)$$

- **Todos los X y P deben llevar gorro de aquí en adelante.**
- Podría ser tentador factorizar $\hat{X}^2+\hat{P}^2 = (\hat{X}-i\hat{P})(\hat{X}+i\hat{P})$ pero X y P no conmutan así que no se puede pero igual será útil definir

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X}+i\hat{P}\right)$$
$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X}-i\hat{P}\right)$$

OJO: aquí usamos minúscula para un operador. Despejando X y P

$$\hat{X} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a^\dagger + a\right)$$
$$\hat{P} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a^\dagger - a\right)$$

- Como X y P son hermitianos, entonces a y $a^\dagger$ no lo son pero uno es el adjunto del otro.

- El conmutador
$$\left[a, a^\dagger\right] = \frac{1}{2}[X + iP, X - iP] = \cdots = 1$$
- Podemos encontrar relaciones relevantes a a y $a^\dagger$
$$\begin{aligned} a^\dagger a &= \frac{1}{2}(X - iP)(X + iP) \\ &= \frac{1}{2}(X^2 + P^2 + iXP + iPX) & &= \frac{1}{2}(X^2 + P^2 - 1) \end{aligned}$$
- Entonces $\hat{H} = a^\dagger a + \frac{1}{2}$
- Análogamente $\hat{H} = aa^\dagger - \frac{1}{2}$
- Definimos $N = a^\dagger a$ que es Hermitiano $N^\dagger = a^dagger(a^\dagger)^\dagger = a^daggera = N$
- $\hat{H} = N + \frac{1}{2}$ entonces los eigenvectores de $\hat{H}$ son e.V. de N y viceversa.
- Calculemos los conmutadores de N y a, $a^\dagger$ (usamos $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$)
$$\begin{aligned} [N, a] &= a^\dagger[a, a] + \left[a^\dagger, a\right]a = -a \\ \left[N, a^\dagger\right] &= a^\dagger\left[a, a^\dagger\right] + \left[a^\dagger, a^\dagger\right]a = a^\dagger \end{aligned}$$
- Si resolvemos la ecuación de eigenvalores $N|\phi_\nu\rangle = \nu|\phi_\nu\rangle$ entonces ya tendremos que $H|\phi_\nu\rangle = (\nu + 1/2)\hbar\omega|\phi_\nu\rangle$
- *Los eigenvalores de N son positivos o cero*
Como la norma del vector $a|\phi_\nu\rangle$ es positiva
$$0 \leq \langle\phi_\nu|a^\dagger a|\phi_\nu\rangle = \langle\phi_\nu|N|\phi_\nu\rangle = \nu\langle\phi_\nu|\phi_\nu\rangle \tag{5}$$
Como $\langle\phi_\nu|\phi_\nu\rangle \geq 0$ entonces $\nu \geq 0$

- (propiedades de $a|\phi_\nu\rangle$) *Si $|\phi_\nu\rangle$ es un e.V. distinto de cero entonces (i) si $\nu = 0$ entonces $a|\phi_{\nu=0}\rangle = 0$, (ii) si $\nu > 0$ entonces $a|\phi_\nu\rangle$ es e.V. de N con eigenvalor $\nu - 1$*
  (I) Según 5 si $\nu = 0$ entonces $\|a|\phi_{\nu=0}\rangle\| = 0$. Además, si un vector satisface $a|\phi\rangle = 0$ entonces es e.V. de N con e.v. 0. Basta multiplicar esta ecuación por $a^\dagger$ por la izq.
  (II) Sup. $\nu > 0$. Entonces por 5 $a|\phi_\nu\rangle$ no es cero pues su norma no es cero. Ahora para ver que $a|\phi_\nu\rangle$ es e.V. de N (usando $[N, a] = -a$)
$$\begin{aligned} Na|\phi_\nu\rangle &= aN|\phi_\nu\rangle - a|\phi_\nu\rangle \\ &= a\nu|\phi_\nu\rangle - a|\phi_\nu\rangle \\ &= (\nu - 1)a|\phi_\nu\rangle \end{aligned}$$

- (propiedades de $a^\dagger |\phi_\nu\rangle$) *Si* $|\phi_\nu\rangle$ *es un e.V. distinto de cero de* N *entonces (i)* $a^\dagger |\phi_\nu\rangle$ *nunca es cero (ii)* $a^\dagger |\phi_\nu\rangle$ *es e.V. de* N *con e.v.* $\nu + 1$

  (I) Si analizamos $\left\| a^\dagger |\phi_\nu\rangle \right\|$ (usando $\left[a, a^\dagger\right] = 1$)

  $$\langle \phi_\nu | a a^\dagger | \phi_\nu \rangle = \langle \phi_\nu | N + 1 | \phi_\nu \rangle = (\nu + 1) \langle \phi_\nu | \phi_\nu \rangle$$

  como $\nu \geq 0$ entonces $\left\| a^\dagger |\phi_\nu\rangle \right\| > 0$

  (II) Ver que $a^\dagger |\phi_\nu\rangle$ es e.V. de N es análogo al caso $a |\phi_\nu\rangle$

  $$N a^\dagger |\phi_\nu\rangle = a^\dagger N |\phi_\nu\rangle + a^\dagger |\phi_\nu\rangle = (\nu + 1) a^\dagger |\phi_\nu\rangle$$

- (el espectro de N son enteros positivos) ¿Cuál es el espectro de N?
- Ya sabemos que $\nu \geq 0$. Supongamos que ν no es entero. Siempre podemos encontrar n tal que $n < \nu < n + 1$.
- Consideremos $|\phi_\nu\rangle$, $a |\phi_\nu\rangle$, $a^2 |\phi_\nu\rangle$, $\ldots$, $a^n |\phi_\nu\rangle$. De acuerdo a lo visto $a^p |\phi_\nu\rangle$ es e.V. de N con e.v. $\nu - p$ (por inducción).
- Siguiendo esto, apicando a a $a^n |\phi_\nu\rangle$ obtenemos un e.V. con e.v. $\nu - n - 1 < 0$, pero habíamos visto que los e.v. de N son siempre positivos! por tanto suponer que ν no es equivocado.
- De acuerdo a lo anterior $a^n |\phi_n\rangle$ es un e.V. de N distinto de cero con e.V. 0. Así

  $$a^{n+1} |\phi_n\rangle = 0$$

- $\therefore$ ν debe ser un entero no negativo.
- Así, los eigenvalores de H son

  $$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$$

- Si partimos de un e.V. de H $|\phi_n\rangle$con e.v. $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ y le aplicamos a obtenemos el e.V. con e.v. $E_{n-1} = (n + 1/2)\hbar\omega - \hbar\omega$. De la misma forma, al aplicarle $a^\dagger$ obtenemos el e.V. de H con e.v. $E_{n+1} = (n + 1/2)\hbar\omega + \hbar\omega$. Estos son los "operadores escalera" porque quitan o agregan cuantos individuales de energía.

$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2$

– Definimos a (descenso) y a^+ (ascenso) ; $[a, a^+] = 1$

$[N, a] = -a$

$[N, a^+] = a^+$

– $N = a^+ a \underset{\uparrow}{\neq} a a^+$ (o,o)

N es hermitiano ; $H = \hbar\omega(N + \frac{1}{2})$

$N|\phi_n\rangle = n|\phi_n\rangle$ $n \geq 0$ entero

$H = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$

$a|\phi_0\rangle = 0$

$a|\phi_n\rangle$ e-vector de N con e-valor $n-1$

$a^+|\phi_n\rangle$ e-vector de N con e-valor $n+1$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X + i \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} P\right)$$

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X - i \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} P\right)$$